

1.7 ΕΦΕΞΗΣ – ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εφεξής γωνίες : Είναι οι γωνίες που έχουν κοινή κορυφή , μία πλευρά κοινή και δεν έχουν άλλο κοινό σημείο

2.

Διαδοχικές γωνίες : Είναι τρεις ή περισσότερες γωνίες που κάθε μία είναι εφεξής με την προηγούμενη της ή την επόμενη της

ΣΧΟΛΙΑ

1.

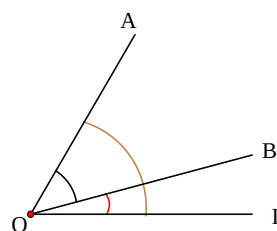
Άθροισμα – διαφορά δύο γωνιών :

Στο σχήμα φαίνονται οι εφεξής γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}\Gamma$.

Ονομάζουμε άθροισμα των γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}\Gamma$

(συμβολίζουμε $\hat{A}\hat{O}B + \hat{B}\hat{O}\Gamma$) τη γωνία $\hat{A}\hat{O}\Gamma$.

Δηλαδή $\hat{A}\hat{O}B + \hat{B}\hat{O}\Gamma = \hat{A}\hat{O}\Gamma$.



Τη γωνία $\hat{A}\hat{O}B$ που πρέπει να προσθέσουμε στη

$\hat{B}\hat{O}\Gamma$ για να βρούμε την $\hat{A}\hat{O}\Gamma$ την ονομάζουμε

διαφορά της $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ από την $\hat{A}\hat{O}\Gamma$ (συμβολίζουμε $\hat{A}\hat{O}\Gamma - \hat{B}\hat{O}\Gamma = \hat{A}\hat{O}B$)

Είναι φανερό ότι επίσης ισχύει $\hat{A}\hat{O}\Gamma - \hat{A}\hat{O}B = \hat{B}\hat{O}\Gamma$

Αν δύο γωνίες δεν είναι εφεξής και θέλουμε να βρούμε το άθροισμά τους, τις κάνουμε εφεξής και εφαρμόζουμε τα παραπάνω.

2.

Μέτρο αθροίσματος – διαφοράς : Το μέτρο του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο γωνιών ισούται με το άθροισμα ή την διαφορά των μέτρων των δύο γωνιών .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δύο ευθείες xx' και yy' τέμνονται στο σημείο O .

Αν $\widehat{xOy} = 48^\circ$ να υπολογίσετε το μέτρο υπολοίπων γωνιών του σχήματος

Τι παρατηρείτε ;

Προτεινόμενη λύση

Η γωνία $\widehat{xOx'}$ είναι ευθεία γωνία,

άρα $\widehat{xOx'} = 180^\circ$.

Όμως $\widehat{xOx'} = \widehat{xOy} + \widehat{yOx'} = 48^\circ + \widehat{\omega}$ άρα $180^\circ = 48^\circ + \widehat{\omega}$ οπότε

$$\widehat{\omega} = 180^\circ - 48^\circ$$

$$\widehat{\omega} = 132^\circ$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\widehat{xOy'} = 132^\circ$

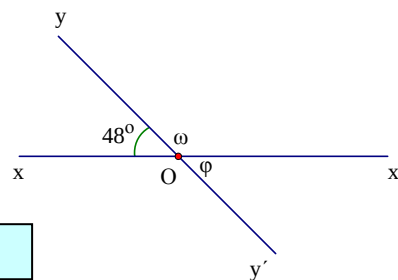
Επίσης, η γωνία $\widehat{yOy'}$ είναι ευθεία γωνία άρα $\widehat{yOy'} = 180^\circ$

Όμως $\widehat{yOy'} = \widehat{\omega} + \widehat{\phi} = 132^\circ + \widehat{\phi}$ άρα $180^\circ = 132^\circ + \widehat{\phi}$ οπότε

$$\widehat{\phi} = 180^\circ - 132^\circ$$

$$\widehat{\phi} = 48^\circ$$

Παρατηρούμε ότι $\widehat{xOy} = \widehat{\phi} = 48^\circ$ και $\widehat{\omega} = \widehat{xOy'} = 132^\circ$



σχόλιο 1

2.

Στο διπλανό σχήμα να βρείτε ποιες γωνίες είναι εφεξής και ποιες διαδοχικές

Προτεινόμενη λύση

Εφεξής είναι τα παρακάτω

ζευγάρια γωνιών $\widehat{B\hat{A}\Delta}$, $\widehat{\Delta\hat{A}E}$

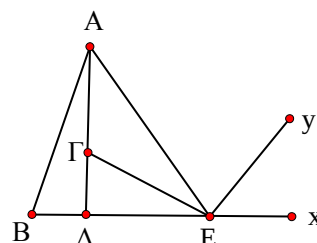
$\widehat{A\hat{\Gamma}E}$, $\widehat{E\hat{\Gamma}\Delta}$

$\widehat{A\hat{\Delta}E}$, $\widehat{A\hat{\Delta}B}$

Διαδοχικές είναι οι γωνίες

$\widehat{\Delta\hat{E}\Gamma} - \widehat{\Gamma\hat{E}A} - \widehat{A\hat{E}y} - \widehat{y\hat{E}x}$

θεωρία 1-2



3.

Να βρείτε το άθροισμα και το μέτρο του αθροίσματος τριών διαδοχικών γωνιών αν έχουν μέτρα 50° , 38° , 130° . Τι είδους γωνία είναι η γωνία που ισούται με το άθροισμα των τριών γωνιών ;

Προτεινόμενη λύση

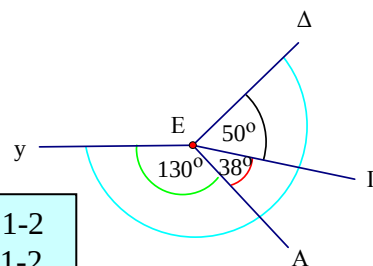
Έστω $\widehat{\Delta \hat{E} \Gamma} = 50^\circ$, $\widehat{\Gamma \hat{E} A} = 38^\circ$ και $\widehat{A \hat{E} \gamma} = 130^\circ$
οι δοσμένες γωνίες.

Τότε $\widehat{\Delta \hat{E} \Gamma} + \widehat{\Gamma \hat{E} A} + \widehat{A \hat{E} \gamma} = \widehat{\Delta \hat{E} \gamma}$

$$50^\circ + 38^\circ + 130^\circ = \widehat{\Delta \hat{E} \gamma}$$

$$218^\circ = \widehat{\Delta \hat{E} \gamma} .$$

Η $\widehat{\Delta \hat{E} \gamma}$ είναι μη κυρτή γωνία



θεωρία 1-2
Σχόλια 1-2

4.

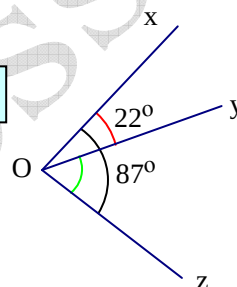
Δίνονται οι εφεξής γωνίες $\widehat{x \hat{O} y}$ και $\widehat{y \hat{O} z}$. Αν $\widehat{x \hat{O} y} = 22^\circ$ και $\widehat{x \hat{O} z} = 87^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{y \hat{O} z}$

Προτεινόμενη λύση

$$\widehat{x \hat{O} y} + \widehat{y \hat{O} z} = \widehat{x \hat{O} z} \text{ άρα}$$

$$\widehat{y \hat{O} z} = \widehat{x \hat{O} z} - \widehat{x \hat{O} y} = 87^\circ - 22^\circ = 65^\circ$$

Σχόλια 1-2



5.

Δίνεται η ευθεία γωνία $\widehat{x \hat{O} x'}$ και οι διαδοχικές γωνίες $\widehat{x \hat{O} z}$, $\widehat{z \hat{O} y}$, $\widehat{y \hat{O} x'}$

Αν $\widehat{x \hat{O} z} = 35^\circ$ και $\widehat{y \hat{O} x'} = 58^\circ$, να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{z \hat{O} y}$.

Προτεινόμενη λύση

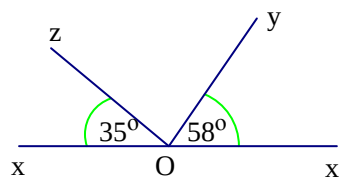
$$\widehat{x \hat{O} x'} = 180^\circ \text{ οπότε } \widehat{x \hat{O} z} + \widehat{z \hat{O} y} + \widehat{y \hat{O} x'} = 180^\circ$$

$$35^\circ + \widehat{z \hat{O} y} + 58^\circ = 180^\circ$$

$$93^\circ + \widehat{z \hat{O} y} = 180^\circ \text{ άρα}$$

$$\widehat{z \hat{O} y} = 180^\circ - 93^\circ = 87^\circ$$

Σχόλια 1-2



6.

Δίνονται τρεις ημιευθείες Ox , Oy , Oz με κοινή αρχή και έτσι ώστε οι διαδοχικές γωνίες $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ και $\widehat{zOx}$ να είναι 120° η κάθε μία. Αν Ox' είναι η αντικείμενη ημιευθεία της Ox , να εξηγήσετε γιατί αυτή είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{yOz}$.

Προτεινόμενη λύση

$\widehat{xOx'} = \text{ευθεία γωνία} \text{ άρα } \widehat{xOx'} = 180^\circ$

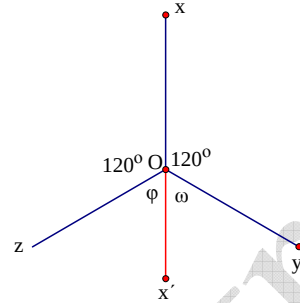
Οπότε $\widehat{xOy} + \widehat{yOx'} = 180^\circ$ άρα

$$120^\circ + \widehat{yOx'} = 180^\circ$$

$$\widehat{yOx'} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Επειδή όμως $\widehat{yOz} = 120^\circ$ θα είναι $\widehat{yOx'} = 60^\circ$

Συνεπώς η Ox' είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{yOz}$



7.

Δίνονται οι εφεξής γωνίες $\widehat{xOy} = 80^\circ$ και $\widehat{yOz} = 50^\circ$. Αν $O\delta$ είναι η διχοτόμος της $\widehat{xOy}$ και $O\delta'$ είναι διχοτόμος της $\widehat{yOz}$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{\delta O\delta'}$.

Προτεινόμενη λύση

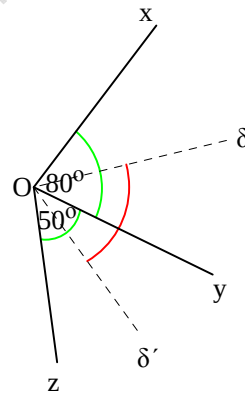
Επειδή $\widehat{xOy} = 80^\circ$ και $O\delta$ διχοτόμος, θα είναι

$$\widehat{xO\delta} = \widehat{\delta Oy} = 40^\circ$$

Ομοίως $\widehat{yO\delta'} = \widehat{\delta'Oz} = 25^\circ$

Όμως $\widehat{\delta O\delta'} = \widehat{\delta Oy} + \widehat{yO\delta'}$ άρα

$$\widehat{\delta O\delta'} = 40^\circ + 25^\circ = 65^\circ$$



8.

Δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο O και μία από τις γωνίες που σχηματίζονται είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ της εφεξής της. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του σχήματος

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι $\hat{\omega} = \frac{1}{3} \hat{\phi}$

Τότε $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ$ άρα $\frac{1}{3} \hat{\phi} + \hat{\phi} = 180^\circ$

$$\frac{1}{3} \hat{\phi} + \frac{3}{3} \hat{\phi} = 180^\circ$$

$$\frac{4}{3} \hat{\phi} = 180^\circ \text{ οπότε}$$

$$\hat{\phi} = 180^\circ : \frac{4}{3} = 180^\circ \cdot \frac{3}{4} = 135^\circ$$

Οπότε θα είναι $\hat{\omega} = 45^\circ$

Εύκολα βρίσκουμε (δες άσκηση 1) ότι $x'Oy' = \hat{\omega} = 45^\circ$ και $xOy' = \hat{\phi} = 135^\circ$

